682. 円，球ニ就イテ

松村　宗治（台北大）

(I)　R_3 内ノ球ニツイテモ同様デアルカラ、今余ハ下ニ R_2 内ノ円ニツイテノベル。

ξ, η ヲバ互ニ直交スル二ツノ円トセバ

$$(1)\quad \bar{\xi} = \cos\varphi\cdot\xi + \sin\varphi\cdot\eta$$

ニテ表ハサルル。円 $\bar{\xi}$ ハ ξ ト φ ナル角ヲナスコトガ分ル、次ニ

$$(2)\quad \bar{\eta} = \sin\bar{\varphi}\cdot\xi + \cos\bar{\varphi}\cdot\eta$$

ナル円 $\bar{\eta}$ ハ η ナル円ト $\bar{\varphi}$ ナル角ヲ形成スルコトハ容易ニ分ル。

ソコデ $\xi, \bar{\xi}, \eta, \bar{\eta}$ ノ *Doppelverhältniss* D ハ下ノ様デアル。

$$(3)\quad D(\xi, \bar{\xi}, \eta, \bar{\eta}) = \frac{\sin\varphi\sin\bar{\varphi}}{\cos\varphi\cos\bar{\varphi}}.$$

$$\therefore\quad \frac{1+D}{1-D} = \frac{\cos(\varphi-\bar{\varphi})}{\cos(\varphi+\bar{\varphi})}$$

(II)　次ニ吾々ハ　$\dot{\xi} = \dfrac{d\xi}{d\theta}$ トシテ (1) ヨリ

$$\dot{\bar{\xi}} = \cos\varphi\cdot\dot{\xi} + \sin\varphi\cdot\dot{\eta}$$

ヲ考ヘル。然ルトキハ ξ ハ $\dot{\xi}$ ナル円ニ垂直デアリ、η ハ $\dot{\eta}$ ナル円ニ垂直デアリ、$\bar{\xi}$ ハ $\dot{\bar{\xi}}$ ナル円ニ垂直デアル。

追テ

$$\ddot{\bar{\xi}} = \cos\varphi\cdot\ddot{\xi} + \sin\varphi\cdot\ddot{\eta}$$

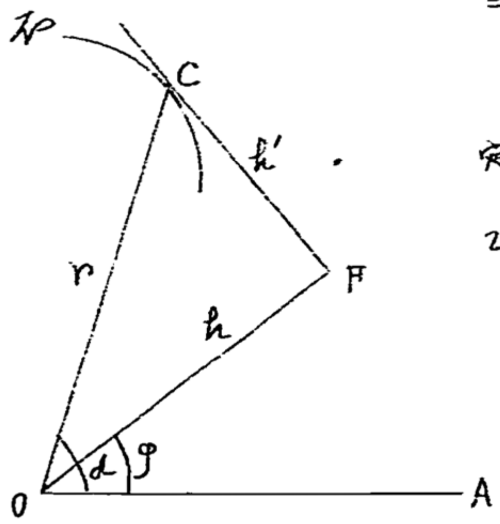
$$\dddot{\bar{\xi}} = \cos\varphi\cdot\dddot{\xi} + \sin\varphi\cdot\dddot{\eta}$$

ヲ考ヘルトキハ $\dot{\xi}$ ハ円 $\ddot{\xi}$ ニ垂直, $\ddot{\xi}$ ハ円 $\dddot{\xi}$ ニ垂直, $\dot{\eta}$ ハ円 $\ddot{\eta}$ ニ垂直, $\ddot{\eta}$ ハ円 $\dddot{\eta}$ ニ垂直, $\dot{\bar{\xi}}$ ハ円 $\ddot{\bar{\xi}}$ ニ垂直, $\ddot{\bar{\xi}}$ ハ円 $\dddot{\bar{\xi}}$ ニ垂直ニナル。

コノ記号ニツイテハ日本数学輯報第十一巻 P.195 ニ於ケル高須氏論文ノモノヲ参照セラレタシ。

下ニ平面幾何ニツイテ考ヘル。

今平面曲線 $\mathfrak{K}$ ハ円 $\xi(t)$ ノ包絡線デアルトスル。コヽニ t ハ Parameter デアル。



$\mathfrak{K}$ 上ニ一点 C ヲトリ、C ヲ定点 O ニ結ビ OC ナル Radius-vektor ヲ r トスル。

C ニテ $\mathfrak{K}$ ニ切線 CF ヲ引キ O ヨリ CF ヘノ垂線ヲ OF トシ長サ OF ヲ h デ表ス。

O ヲ通過スル定直線 OA ト OC トノ間ノ角ヲ α, OA ト OF トノ間ノ角ヲ φ トスル。

サテ C ニテ CF ニ切スル円ヲ ξ トシ, C ニテ OC ニ切ス

ル円ヲ η トスル。

OC ニ C ニテ切スル円ハ二個アリテ OC ノ両側ニ存在スル。ソレハ $\pm\eta$ デアル。

サテ下ニ η ナル式ヲ求メル。

先ヅ *Math. Z.* 41, S. 717 ニ於ケル Doetsch ノ論文デ言ッテイルヤウニ

$$(1)\quad \tan(\alpha-\varphi)=\frac{r'(\alpha)}{r(\alpha)}=\frac{h'(\varphi)}{h(\varphi)}$$

ガ成立ツ。

先ヅ η ノ式ハ

$$(2)\quad \eta=\cos\psi\cdot\xi+\sin\psi\cdot\xi'$$

ト置クコトガ出来ル。コヽニ ψ ハ η ト ξ トノ間ノ角デアル。

サテ (1) ヨリ

$$(3)\quad \begin{cases} \cos(\alpha-\varphi)=\dfrac{r}{\sqrt{r^2+r'^2}}, \\ \sin(\alpha-\varphi)=\dfrac{r'}{\sqrt{r^2+r'^2}} \end{cases}$$

トナル。(3)ヲ(2)ニ代入セバ

$$(4)\quad \eta=\pm\left\{\frac{r}{\sqrt{r^2+r'^2}}\,\xi+\frac{r'}{\sqrt{r^2+r'^2}}\,\xi'\right\}$$

トシテ η ノ式ガ得ラレル。(3)ニ於ケル根号ノ前ハ正，負ヲトルベキガ故ニ(4)ノヤウニナルノデアル。

尚(4)ハ亦

$$(5)\quad \eta = \pm\left\{ \frac{h}{\sqrt{h^2+h'^2}}\xi + \frac{h'}{\sqrt{h^2+h'^2}}\xi' \right\}$$

或ハ $$r\eta = \pm\{h\xi + h'\xi'\}$$

ト書クコトガ出來ル。

但シOガ擬似中心ナル場合ニツイテハ以前ココデノベタ。

(4)或ハ(5)ニ於ケル円ηヘノ切線ハ常ニ定点ヲ通過スルコトニナル。

尚、序ニ上記 Doetsch ノ論文ノ定理1ノ証明ニツイテハ普通ノ初等微積分學ヨリ（例ヘバ坂井博士著微積分學 P. 161）

$$\tan(\alpha-\varphi) = \frac{r'(\alpha)}{r(\alpha)}$$

ガ分ルカラ容易ニ分ルコトト思ハレル。

Cナル曲線ノ式ガ例ヘバ

$$(6)\quad r = a e^{m\alpha}$$

ナル場合ニハ(4)ハ下ノヤウニナル。

$$(7)\quad \sqrt{1+m^2}\,\eta = \pm\{\xi + m\xi'\},$$

コヽニ m ハ定数デアル。

(4)ヲバ斯ノ如ク種々ノ特別ノ場合ニツイテ求メ得ラルルコト勿論デアル。

尚(2)ナル円ηガ常ニ定点η_0ヲ通過スルナラバ

$\cos\psi$, $\sin\psi$ ガ求メラレテ(2)ハ次ノヤウニナル。

$$(8)\qquad \eta = \pm\left\{(\xi'\eta_0)\xi + (\xi\eta_0)\xi'\right\} : \sqrt{(\xi\eta_0)^2 + (\xi'\eta_0)^2}.$$